OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet u Podgorici
Univerzitet Crne Gore

Tema 5

Diskretni i Prošireni Kalmanov filtar

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Odrede ZOH ekvivalent kontinualnog sistema pobuđenog slučajnim signalom
- Dizajniraju optimalni estimator stanja (Kalmanov filtar) za diskretne LTI sisteme
- Odrede Kalmanovo pojačanje i kovarijacionu matricu greške u estimaciji stanja simulacijom diskretne Rikatijeve dif. jednačine
- Dizajniraju diskretni estimator poremećaja i parametara sistema
- Izvrše estimaciju stanja nelinearnog sistema

Model diskretnog sistema

Posmatrajmo linearni diskretni sistem opisan u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(n) + \mathbf{M}_d\mathbf{w}_d(n),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}_d\mathbf{u}(n) + \mathbf{v}_d(n).$$

Prilikom izvođenja diskretnog Kalmanovog filtra, potrebno je usvojiti nekoliko pretpostavki:

- Par $(\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d)$ je detektabilan
- Šumovi $\mathbf{w}_d(n)$ i $\mathbf{v}_d(n)$ su pseudo-bijeli Gausovi šumovi srednje vrijednosti 0 (centrirani) i varijanse $\mathbf{Q}_d$ i $\mathbf{R}_d$, respektivno:

$$E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{w}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{Q}_d\delta(m),$$
$$E\left[\mathbf{v}_d(n)\mathbf{v}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{R}_d\delta(m),$$
$$E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{v}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{0}.$$

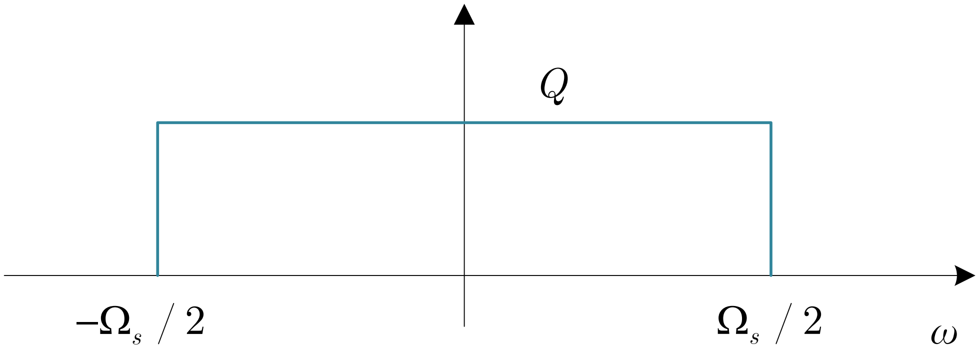
- Matrica $\mathbf{R}_d$ je invertabilna

Model sistema

Napomena:

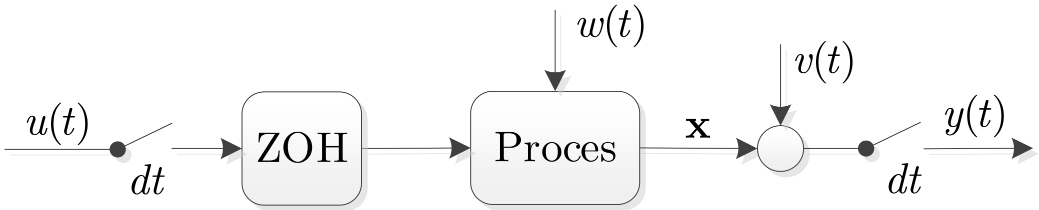
Kod kontinualnog Kalmanovog filtra usvaja se pretpostavka da su šumovi bijeli, odnosno da se opisuju konstantnim spektralnim gustinama snage (PSD) vrijednosti $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$. Varijansa bijelog šuma je beskonačna, odnosno njegova autkorelaciona funkcija je jednaka $\mathbf{Q}\delta(t)$, gdje je $\delta(t)$ Dirakov impuls.

Kod diskretnog Kalmanovog filtra procesni i mjerni šum imaju spektralnu gustinu snage $\mathbf{Q}_d$ i $\mathbf{R}_d$ respektivno, ali je ona konstantna na intervalu $\omega \in [0, \mathbf{\Omega}_s/2]$, gjde je $\mathbf{\Omega}_s$ učestanost odabiranja. Iz tog razloga se ovaj šum naziva i pseudo-bijeli. Varijansa diskretnog bijelog šuma je konačna i jednaka $\mathbf{Q}_d$ $(\mathbf{R}_d)$, dok je njegova autokoralaciona funkcija jednaka $\mathbf{Q}\delta(n)$ $(\mathbf{R}\delta(n))$.



Kontinualni sistem – diskretna mjerenja

Kalmanov filtar se uvijek implementira na numeričkom računaru, čak i kada je proces kontinualan. Stoga ćemo najprije razmotriti slučaj kad su mjerenja sistema odabiraju periodom dt. Takođe ćemo smatrati da se konverzija diskretnog signala $\mathbf{u}(n)$ u kontinualni vrši pomoću ZOH kola.



Odziv sistema sa slike možemo zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}dt}\mathbf{x}(n) + \left[\int_{ndt}^{ndt+dt} e^{\mathbf{A}(ndt+dt-\tau)}\mathbf{B}\,d\tau\right]\mathbf{u}(n) + \left[\int_{ndt}^{ndt+dt} e^{\mathbf{A}(ndt+dt-\tau)}\mathbf{M}\mathbf{w}(\tau)d\tau\right].$$

Dalje, smjenom $ndt+dt\text{-}\tau=k$, prethodni integral se svodi na:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}dt}\mathbf{x}(n) + \left(\int_0^{dt} e^{\mathbf{A}k}\mathbf{B}\,dk\right)\mathbf{u}(n) + \int_0^{dt} e^{\mathbf{A}k}\mathbf{M}\mathbf{w}\left((n+1)dt-k\right)dk$$

Sa druge strane, jednačina mjerenja ima oblik:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) + \mathbf{v}(n).$$

Kontinualni sistem – diskretna mjerenja

Upoređujući prethodne jednačinu i jednačinu sa prvog slajda, jasno je da se prethodni model može zapisati u diskretnom obliku uvođenjem sljedećih smjena:

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{e}^{\mathbf{A}dt}, \mathbf{B}_d = \int_0^m e^{\mathbf{A}m}\mathbf{B}\,dm, \mathbf{M}_d = \mathbf{I}, \mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \mathbf{D}_d = \mathbf{D}.$$

Diskretni procesni i mjerni šum su jednaki:

$$\mathbf{w}_d(n) = \int_0^{dm} e^{\mathbf{A}m}\mathbf{M}\mathbf{w}\big((n+1)dt - m\big)\,dm, \mathbf{v}_d(n) = \mathbf{v}(ndt).$$

Zbog odabiranja, kovarijansa diskretnog mjernog šuma će biti jednaka:

$$\mathbf{R}_d = \mathbf{R} \,/\, dt.$$

Sa druge strane kovarijaciona matrica procesnog šuma je jednaka:

$$\mathbf{Q}_d = E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{w}_d(n)^T\right] = \int_0^{dm} e^{\mathbf{A}m}\mathbf{M}\mathbf{W}\mathbf{M}^T e^{\mathbf{A}^T m}\,dm.$$

Za male periode odabiranja, prethodni izraz se može aproksimirati sa:

$$\mathbf{Q}_d = dt\mathbf{M}\mathbf{W}\mathbf{M}^T.$$

Primjer – diskretizacija sistema

Kontinualni sistem je opisan u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{M}w(t),$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + v(t),$$

gdje su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = 0.0001, \mathbf{R} = 0.0001.$$

a) Simulirati odziv sistema ako je $u(t)=h(t)$ i $q=0.1\delta(t)$. Razmotriti dvije periode odabiranja $dt=0.1\text{s}$ i $dt=0.01\text{s}$.

b) Odrediti i uporediti varijanse izlaznog signala kontinualnog sistema i diskretnih ekvivalenata.

Diskretni model sistema ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(n) + \mathbf{w}_d(n),$$
$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n),$$

gdje je $\mathbf{w}_d(n)$ diskretni bijeli šum čija je kovarijaciona matrica $\mathbf{Q}_d$.

Primjer – diskretizacija sistema

a) U slučaju kada je dt=0.1s, odgovarajuće matrice diskretnog ekvivalenta su:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.9953 & 0.0905 \\ -0.0905 & 0.8144 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0998 \\ -0.0047 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_d = \int_0^{dm} e^{\mathbf{A}m}\mathbf{MWM}^T e^{\mathbf{A}^T m} dm = \begin{bmatrix} 0.0100 & -0.0005 \\ -0.0005 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Za dt=0.01s važi:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0099 \\ -0.0099 & 0.9801 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0100 \\ -0.0000 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_d = \int_0^{dm} e^{\mathbf{A}m}\mathbf{MWM}^T e^{\mathbf{A}^T m} dm = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 1.000 & -0.005 \\ -0.005 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

b) Varijansa izlaznog signala u stacionarnom stanju je jednaka $\sigma_y^2 = \mathbf{CPC}^T$. gdje je $\mathbf{P}$ kovarijaciona matrica stanja u stacionarnom stanju koja se dobija rješavanjem diferencijalne jednačine:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{AP}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T + q\mathbf{MM}^T.$$

Primjer – diskretizacija sistema

Rješenje prethodne diferencijalne jednačine u stacionarnom stanju se u Matlab-u može dobiti pomoću komande `lyap(A,M*q)`:

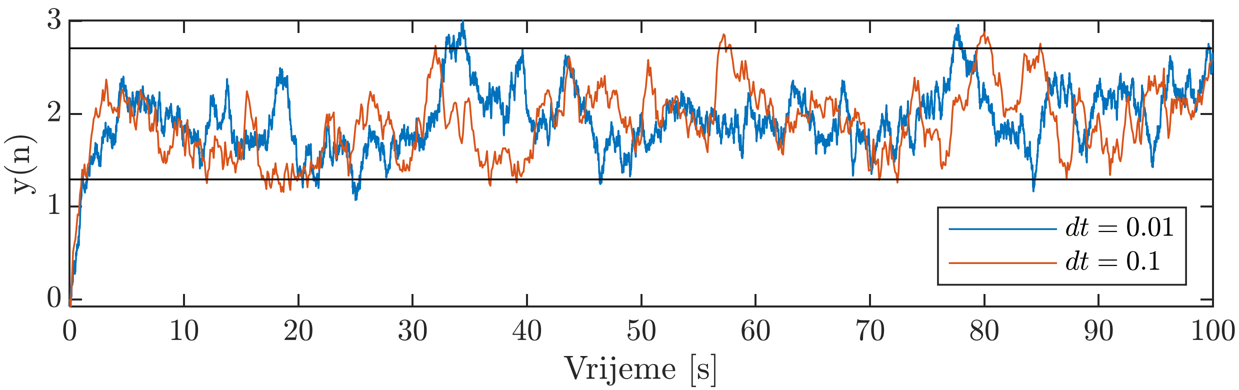
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1250 & -0.0500 \\ -0.0500 & 0.0250 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi $\sigma_y^2 = \mathbf{CPC}^T = 0.125.$

Kovarijaciona matrica diskretnog sistema zadovoljava jednačinu:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{P}(n) + \mathbf{P}(n)\mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}_d.$$

Rješenje prethodne diferencne jednačine u stacionarnom stanju se određuje pomoću komande `dlyap(Ad,Qd)` i ono je isto kao u kontinualnom slučaju (za obje periode odabiranja). Dakle varijansa izlaznog signala kontinualnog sistema i diskretnih ekvivalenata treba takođe da bude ista. Na slici ispod je prikazan odziv diskretnih ekvivalenata. Zašto je srednja vrijednost odziva jednaka 2?



Primjer – diskretizacija sistema

```
clear all
close all
A=[0 1;-1 -2]; B=[1;0];M=[1;0];C=[1 0];
Q=0.1;
%%
dt=0.01;
ss1=ss(A,B,C,0);
ssd=c2d(ss1,dt);
Ad=ssd.A;Bd=ssd.B;Cd=C;Md=eye(2);
Rd=1/dt;
Qd1=dt*M*Q*M';
syms v; Qd=eval(int(expm(A*v)*M*Q*M'*expm(A'*v),0,dt));
tf=100;
x(:,1)=[0;0];
for n=1:tf/dt
    x(:,n+1)=Ad*x(:,n)+Bd*1+chol(Qd)*randn(2,1);
    y(n)=Cd*x(:,n);
end
t=[0:tf/dt-dt]*dt;
plot(t,y)
xlabel('Vrijeme [s]')
ylabel('y(n)')
set(gcf,'position',[360.0000  469.0000  547.6667  149.0000])
```

Rekurzivna jednačina DKF-a

Diskretni Kalmanov filtar je u princupu isti kao u kontinualnom slučaju. Međutim, kod njega se predikacija stanja na osnovu determinističkog modela sistema i korekcija stanja na osnovu inovacije (razlike između predikacije i stvarnih mjerenja) vrše u dva odvojena koraka. Samim tim kod diskretnog Kalmanovog razlikujemo:

- Predikciju stanja u trenutku $n+1$ koju označavamo sa $\widehat{\mathbf{x}}(n+1|n)$. Predikacija stanja se vrši na osnovu mjerenja do trenutka n i često se naziva *apriorna* estimacija. Kovarijaciona matrica apriorne greške je jednaka:

$$\mathbf{P}(n+1 \mid n) = E\Big[\big(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n)\big)\big(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n)\big)^T\Big]$$

- Ažurirana (korigovana) stanja se označavaju sa $\widehat{\mathbf{x}}(n+1|n+1)$. Korekcija stanja zavisi od mjerenja do trenutka $n+1$ i često se naziva aposteriorna estimacija. Kovarijaciona matrica aposteriorne greške je jednaka:

$$\mathbf{P}(n+1 \mid n+1) = E\Big[\big(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n+1)\big)\big(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n+1)\big)^T\Big]$$

Rekurzivna jednačina DKF-a

Predikcija:

U trenutku n poznata nam je aposteriorna estimacija $\widehat{\mathbf{x}}(n|n)$. Predikciju stanja vršimo na osnovu modela sistema:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n) = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}(n \mid n) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(n). \qquad (1)$$

U trenutku n kovarijaciona matrica aposteriorne greške je jednaka $\mathbf{P}(n|n)$, dok je kovarijaciona matrica apriorne greške zadovoljava sljedeću diferencnu jednačinu:

$$\mathbf{P}(n+1 \mid n) = \mathbf{A}_d \mathbf{P}(n \mid n) \mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d \mathbf{Q}_d \mathbf{M}_d^T. \quad (*)$$

Korekcija:

U trenutku $n{+}1$ vrši se korekcija apriorne estimacije:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n) + \mathbf{K}(n+1)(\mathbf{y}(n+1) - \mathbf{C}_d \mathbf{x}(n+1 \mid n) - \mathbf{D}_d \mathbf{u}(n)), \quad (2)$$

gdje je $\mathbf{K}(n{+}1)$ Kalmanovo pojačanje koje treba odrediti.

Pojačanje $\mathbf{K}(n{+}1)$ treba da bude takvo da kovarijaciona matrica aposterirone greške bude minimalna.

Rekurzivna jednačina DKF-a

Na osnovu jednačine mjerenja sistema možemo zapisati:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(n+1)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n+1)\\&=(\mathbf{I}-\mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d)\big(\mathbf{x}(n+1)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n)\big)-\mathbf{K}(n+1)\mathbf{v}_d(n+1),\end{aligned}$$

pa je:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(n+1\mid n+1)=E\Big[\big(\mathbf{x}(n+1)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n+1)\big)\big(\mathbf{x}(n+1)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n+1)\big)^T\Big]\\&=\big(\mathbf{I}-\mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d\big)\mathbf{P}(n+1\mid n)\big(\mathbf{I}-\mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d\big)^T+\mathbf{K}(n+1)\mathbf{Q}_d\mathbf{K}^T(n+1)\\&=\mathbf{P}(n+1\mid n)-\mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)-\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T\mathbf{K}^T(n+1)\\&+\mathbf{K}(n+1)\big(\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T+\mathbf{Q}_d\big)\mathbf{K}^T(n+1).\quad(**)\end{aligned}$$

Kao u kontinualnom slučaju, potrebno je naći vektor $\mathbf{K}(n+1)$ koji minimizuje trag aposteriorne kovarijacione matrice:

$$\frac{\partial\operatorname{trace}\big(\mathbf{P}(n+1\mid n+1)\big)}{\partial\mathbf{K}(n+1)}=-2\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T+2\mathbf{K}(n+1)\big(\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T+\mathbf{Q}_d\big).$$

Rekurzivna jednačina DKF-a

Optimalni Kalmanov vektor je dalje jednak:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{P}(n+1\,|\,n)\mathbf{C}_d^T\left(\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n+1\,|\,n)\mathbf{C}_d^T + \mathbf{R}_d\right)^{-1}. \qquad (***)$$

Primijetimo da je za određivanje optimalnog vektora potrebno poznavanje kovarijacione matrice apriorne greške koja se može izračunati pomoću izraza (*). Međutim, za računanje $\mathbf{P}(n+1|n)$ potrebno je poznavati $\mathbf{P}(n|n)$. Jednačina za ažuriranje aposteriorne kovarijacione matrice se dobija uvrštavanjem (***) u (**):

$$\mathbf{P}(n+1\,|\,n+1) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d\right)\mathbf{P}(n+1\,|\,n). \quad (****)$$

Jednačine (1), (2), (*) - (****) predstavljaju Kalmanov filtar.

Jednačine (1) i (2) se inicijalizuju sa $\hat{\mathbf{x}}(1|0)$. Jednačine (*)-(****) se inicijalizuju na vrijednost $\mathbf{P}(1|0)$, koja predstavlja stepen povjerenja u inicijalizaciju $\hat{\mathbf{x}}(1|0)$.

Treba napomenuti da se jednačine (*) i (***) mogu integraliti u realnom vremenu. Ukoliko su sistem i šumovi stacionarni, tada se ove jednačine mogu integraliti offline.

Rekurzivna jednačina DKF-a

Da bi odredili vrijednost Kalmanovog pojačanja u stacionarnom stanju, potrebno je uvrstiti jednačine (****) i (***) u (**), nakon čega se dobija Rikatijeva jednačina:

$$\mathbf{P}(n+1\mid n) = \mathbf{A}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{A}_d^T$$
$$-\mathbf{A}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T\left(\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n+1\mid n)\mathbf{C}_d^T+\mathbf{R}_d\right)^{-1}+\mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T$$

Ako rješenje ove jednačine u stacionarnom stanju označimo sa $\mathbf{P}_p$, tada je:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\infty) = \mathbf{P}_p\mathbf{C}_d^T\left(\mathbf{C}_d\mathbf{P}_p\mathbf{C}_d^T+\mathbf{R}_d\right)^{-1},$$
$$\mathbf{P}_c = \mathbf{P}(\infty\mid\infty) = \left(\mathbf{I}-\mathbf{K}\mathbf{C}_d\right)\mathbf{P}_p.$$

Napomene (bez dokaza):

1. Može se pokazati da je kovarijaciona matrica $\mathbf{P}_c$ uvijek manja od $\mathbf{P}_p$.
2. Kovarijaciona matrica estimiranog izlaznog signala je takođe uvijek manja od kovarijacione matrice mjerenog signala, što znači da je uvijek bolje korisititi filrirana mjerenja, nego samo mjerenja.

Rekurzivna jednačina DKF-a

Konačno, koraci Kalmanovog filtra su sumirani ispod.

1. Inicijalizacija Kalmanovog filtra

$$\hat{\mathbf{x}}(1 \mid 0) = E\left[\mathbf{x}(1 \mid 0)\right], \mathbf{P}(1 \mid 0) = E\left[\left(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(1 \mid 0)\right)\left(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(1 \mid 0)\right)^T\right]$$

$$\mathbf{Q}_d = E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{w}_d^T(n)\right], \mathbf{R}_d = E\left[\mathbf{v}_d(n)\mathbf{v}_d^T(n)\right]$$

2. U svakom trenuku $n>0$ izvršavati sljedeće jednačine:

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n \mid n-1)\mathbf{C}_d^T\left(\mathbf{C}_d\mathbf{P}(n \mid n-1)\mathbf{C}_d^T + \mathbf{R}_d\right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n \mid n) = \hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1) + \mathbf{K}(n)\left(y(n) - \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n \mid n-1) - \mathbf{D}_d\mathbf{u}(n)\right)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n) = \mathbf{A}_d\hat{\mathbf{x}}(n \mid n) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{P}(n \mid n) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}_d\right)\mathbf{P}(n \mid n-1)$$

$$\mathbf{P}(n+1 \mid n) = \mathbf{A}_d\mathbf{P}(n \mid n)\mathbf{A}_d^T + \mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T$$

Napomena:

Zbog realizacije u realnom vremenu uvedeno je vremensko kašnjenje od jednog odbirka u jednačinama (2), (***) i (****).

Primjer – diskretni Kalmanov filtar

Kontinualni sistem je opisan u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{M}w(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),$$

gdje su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Odrediti diskretni ekvivalent sistema, ako je perioda odabiranja dt=0.1s.

b) Estimirati stanja sistema pomoću Kalmanovog filtra, ako je $u(t)=h(t)$. Odrediti Kalmanovo pojačanje u stacionarnom stanju.

Diskretni ekvivalent sistema se zapisuje u obliku:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}(n) + \mathbf{w}_d(n),$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(n),$$

gdje su:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0.9953 & 0.0905 \\ -0.0905 & 0.8144 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0998 \\ -0.0047 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_d = \int_0^{dm} e^{\mathbf{A}m}\mathbf{M}\mathbf{W}\mathbf{M}^T e^{\mathbf{A}^T m} dm = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 1.000 & -0.005 \\ -0.005 & 0.000 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_d = \mathbf{R} / dt = 0.001.$$

Primjer – diskretni Kalmanov filtar

b) Kalmanovo pojačanje u stacionarnom stanju je jednako:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0.0073 & -0.0023 \end{bmatrix}^T.$$

Kalmanovo pojačanje se može odrediti i pomoću ugrađene Matlab-ove funkcije:

```
[~, K,P]=kalmd(ss(A,M,C,0),Q,R,dt),
```

gdje je `ss1` model u prostoru stanja kontinualnog sistema, `Q` i `R` su kovarijacione matrice procesnog i mjernog suma, dok je `dt` perioda odabiranja.

Ukoliko je diskretni ekvivalent sistema poznat, onda se može koristiti naredna komanda:

```
[~, K,P]=kalman(ss(Ad,Md,Cd,0,dt),Qd,Rd).
```

Naravno, u oba slučaja treba da se dobije isto rješenje.

Napomena: Ukoliko bi diskretizovali jednačine kontinualnog KF-a pomoću Ojerovog metoda, za malo dt bi dobili isto rješenje:

$$\mathbf{P}(n+1) = \mathbf{P}(n) + dt\left(\mathbf{AP}(n) + \mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T - \mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{CP}(n) + \mathbf{MQM}^T\right)$$
$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}.$$

Međutim, diskretno Kalmanovo pojačanje se dobija tako što se gornje pojačanje pomnoži sa dt, jer je:

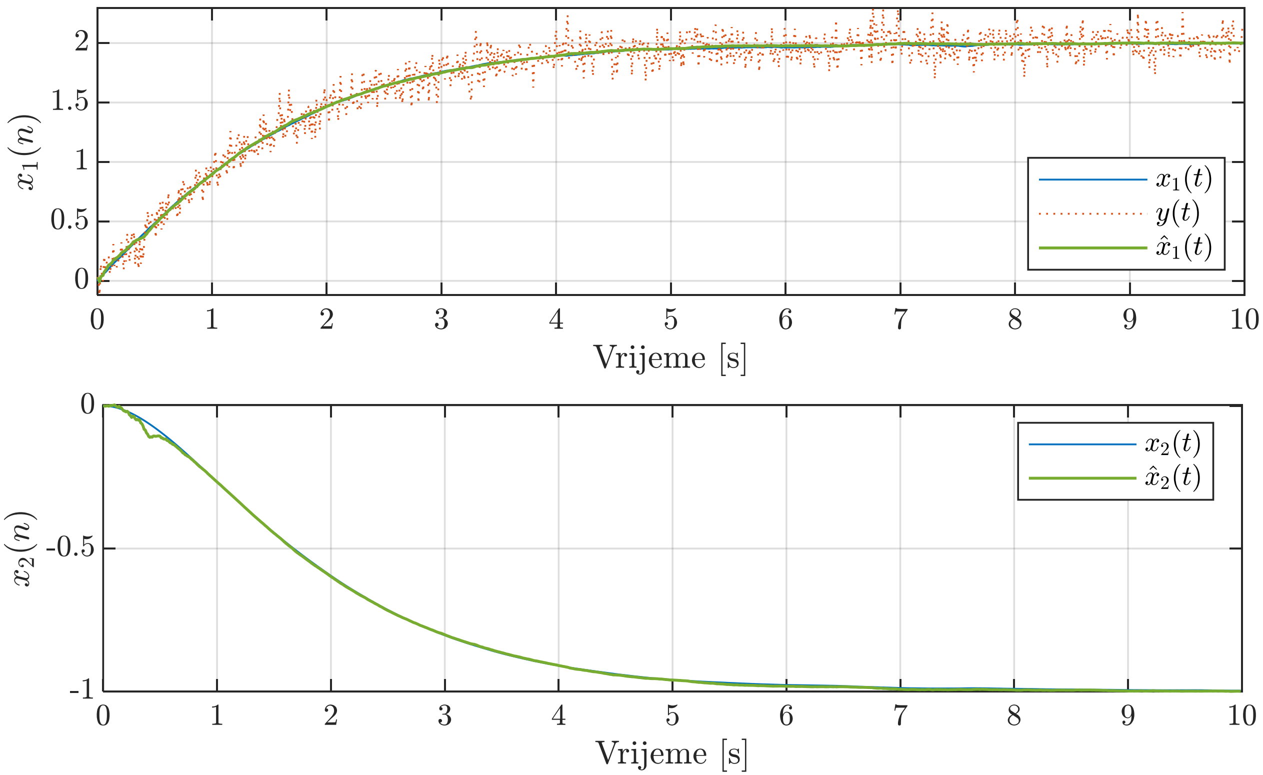
$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n) + dt\left(\mathbf{A} + \mathbf{Bu}(n) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n)\right) = (\mathbf{I} + dt\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}}(n) + dt\mathbf{K}(n)e(n).$$

Primjer – diskretizacija sistema

Kovarijacona matrica aprirorne i aposterione greške u stacionarnom stanju je:

$$\mathbf{P}_p = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0.7362 & -0.2318 \\ -0.2318 & 0.1024 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_c = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0.7308 & -0.2301 \\ -0.2301 & 0.1019 \end{bmatrix},$$

što znači da je varijansa greške u estimaciji stanja x_1 jednaka 0.7308×10^{-4}, dok je varijansa greške u estimaciji stanja x_2 jednaka 0.1019×10^{-4}.



Primjer – diskretni Kalmanov filtar

```
A=[0 1;-1 -2]; B=[1;0];M=[1;0];C=[1 0];
Q=0.0001;R=0.0001;
%%
dt=0.01;
ss1=ss(A,B,C,0);
ssd=c2d(ss1,dt);
Ad=ssd.A;Bd=ssd.B;Cd=C;Md=eye(2);
Rd=R/dt;
Qd1=dt*M*Q*M';
syms v; Qd=eval(int(expm(A*v)*M*Q*M'*expm(A'*v),0,dt));
tf=10;
x(:,1)=[0;0];
xp(:,1)=[0;0];
Pp=0.01*eye(2);
for n=1:tf/dt
    x(:,n+1)=Ad*x(:,n)+Bd*1+chol(Qd)*randn(2,1);
    y(n)=Cd*x(:,n)+sqrt(Rd)*randn;
    %% korekcija na osnovu mjerenja
    K=Pp*Cd'*(Cd*Pp*Cd'+Rd)^-1;
    xc(:,n)=xp(:,n)+K*(y(n)-Cd*xp(:,n));
    %% predikcija na osnovu modela
    xp(:,n+1)=Ad*xc(:,n)+Bd*1;
    %% update cov matrica
    Pc=(eye(2)-K*Cd)*Pp;
    Pp=Ad*Pc*Ad'+Qd;
end
```

Prošireni Kalmanov filtar

Posmatrajmo nelinearni diskretni sistem opisan u prostoru stanja na sljedeći način:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}_d\left(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{w}_d(n)\right),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}_d(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n)) + \mathbf{v}_d(n).$$

gdje su $\mathbf{f}_d$ i $\mathbf{h}_d$ nelinearne funkcije.

Smatraćemo da su šumovi $\mathbf{w}_d(n)$ i $\mathbf{v}_d(n)$ Gausovi, nekorelisani i da imaju srednju vrijednost nula. Odnosno, neka je:

$$E\left[\mathbf{w}_d(n)\right] = \mathbf{0},$$

$$E\left[\mathbf{v}_d(n)\right] = \mathbf{0},$$

$$E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{w}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{Q}_d\delta(m),$$

$$E\left[\mathbf{v}_d(n)\mathbf{v}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{R}_d\delta(m),$$

$$E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{v}_d(n+m)^T\right] = \mathbf{0}.$$

Cilj je dizajnirati estimator stanja zadatog nelinearnog sistema pod pretpostavkom da je model sistema poznat.

Prošireni Kalmanov filtar

Estimacija stanja nelinearnog sistema se takođe radi u dva koraka. Najprije se vrši predikacija stanja koja se može aproksimirati kao očekivana vrijednost:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n) = E\left[\mathbf{x}(n+1)\right] \approx \mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n \mid n), \mathbf{u}(n)) \qquad (1).$$

Da bismo odredili kovarijansu apriorne greške u estimaciji, najprije ćemo jednačinu stanja razviti u Tejlorov red u okolini aposteriorne estimacije $\widehat{\mathbf{x}}(n|n)$:

$$\mathbf{x}(n+1) \approx \mathbf{f}_d(\hat{\mathbf{x}}(n \mid n), \mathbf{u}(n)) + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \mathbf{x}(n)}\right|_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n|n)}}_{\mathbf{A}_d(n)} \left(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n \mid n)\right)$$

$$+ \underbrace{\left.\frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \mathbf{w}_d(n)}\right|_{\mathbf{w}_d(n)=E[\mathbf{w}_d(n)]}}_{\mathbf{M}_d(n)} \left(\mathbf{w}_d(n) - E\left[\mathbf{w}_d(n)\right]\right),$$

Matrice $\mathbf{A}_d$ i $\mathbf{M}_d$ predstavljaju Jakobijan funkcije $\mathbf{f}_d$ izračunat u tačakama $\widehat{\mathbf{x}}(n|n)$ i $\mathrm{E}[\mathbf{w}_d(n)]$, respektivno.

Prošireni Kalmanov filtar

Dalje, apriorna greška u estimaciji je približno jednaka:

$$\mathbf{x}(n+1)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n)\approx\mathbf{A}_d(n)\big(\mathbf{x}(n)-\hat{\mathbf{x}}(n\mid n)\big)+\mathbf{M}_d(n)\mathbf{w}_d(n),$$

dok je kovarijaciona matrica apriorne greške:

$$\mathbf{P}(n+1\mid n)=\mathbf{A}_d\mathbf{P}(n\mid n)\mathbf{A}_d^T+\mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T. \quad (*)$$

Slično, predikcija izlaza se vrši tako što u jednačinu mjerenja uvrstimo apriornu estimaciju stanja:

$$\hat{\mathbf{y}}(n)\approx\mathbf{g}_d(\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n),\mathbf{u}(n)),$$

odnosno aposteriorna estimacija stanja je jednaka:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n+1)=\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n)+\mathbf{K}(n+1)\big(\mathbf{y}(n)-\mathbf{g}_d(\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n),\mathbf{u}(n))\big) \quad (2).$$

Da bi odredili kovarijacionu matricu aposteriorne greške, prvo treba $\mathbf{y}(n)$ razviti u okolini tačke $\widehat{\mathbf{x}}(n+1|n)$:

$$\mathbf{y}(n+1)\approx\mathbf{g}_d(\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n),\mathbf{u}(n))+\underbrace{\left.\frac{\partial\mathbf{g}_d}{\partial\mathbf{x}(n)}\right|_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n+1|n)}}_{\mathbf{C}_d(n)}\big(\mathbf{x}(n)-\hat{\mathbf{x}}(n+1\mid n)\big)+\mathbf{v}_d(n).$$

Prošireni Kalmanov filtar

Samim tim, aposteriorna estimacija stanja se može aproksimirati na sljedeći način:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1\,|\,n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n+1\,|\,n) + \mathbf{K}(n+1)\big(\mathbf{C}_d\left(\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1\,|\,n)\right) + \mathbf{v}_d(n)\big).$$

Praveći analogiju sa linearnim Kalmanovim filtrom, kovarijaciona matrica aposteriorne greške će biti jednaka:

$$\mathbf{P}(n+1\,|\,n+1) = \big(\mathbf{I} - \mathbf{K}(n+1)\mathbf{C}_d(n)\big)\mathbf{P}(n+1\,|\,n). \quad (**)$$

dok je optimalno Kalmanovo pojačanje:

$$\mathbf{K}(n+1) = \mathbf{P}(n+1\,|\,n)\mathbf{C}_d^T(n)\big(\mathbf{C}_d(n)\mathbf{P}(n+1\,|\,n)\mathbf{C}_d^T(n) + \mathbf{R}_d\big)^{-1}. \quad (***)$$

Jednačine (1), (2), (*) - (***) predstavljaju prošireni Kalmanov filtar (eng. Extended Kalman Filter, EKF).

Bitno je uočiti da se predikcija i korekcija stanja vrše na osnovu nelinearnih funkcija $\mathbf{f}_d$ i $\mathbf{g}_d$, dok se Jakobijani ovih funkcija koriste za ažuriranje kovarijaconih matrica i Kalmanovog pojačanja. Zbog uvedenih aproksimacija EKF filtar nije optimalan, niti je zagarantovana konvergencija kovarijacionih matrica.

Rekurzivne jednačine EKF-a

Konačno, koraci proširenog Kalmanovog filtra su sumirani ispod.

1. Inicijalizacija Kalmanovog filtra

$$\hat{\mathbf{x}}(1 \mid 0) = E\left[\mathbf{x}(1 \mid 0)\right], \mathbf{P}(1 \mid 0), \mathbf{Q}_d = E\left[\mathbf{w}_d(n)\mathbf{w}_d^T(n)\right], \mathbf{R}_d = E\left[\mathbf{v}_d(n)\mathbf{v}_d^T(n)\right]$$

1. U svakom trenuku $n>0$ izvršavati sljedeće jednačine:

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n \mid n-1)\mathbf{C}_d^T(n)\left(\mathbf{C}_d(n)\mathbf{P}(n \mid n-1)\mathbf{C}_d^T(n) + \mathbf{R}_d\right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n \mid n) = \hat{\mathbf{x}}(n \mid n-1) + \mathbf{K}(n)\left(\mathbf{y}(n) - \mathbf{g}_d(\mathbf{x}(n \mid n-1))\right)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1 \mid n) = \mathbf{f}_d\left(\hat{\mathbf{x}}(n \mid n), \mathbf{u}(n)\right)$$

$$\mathbf{P}(n \mid n) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}_d(n)\right)\mathbf{P}(n \mid n-1)$$

$$\mathbf{P}(n+1 \mid n) = \mathbf{A}_d(n)\mathbf{P}(n \mid n)\mathbf{A}_d^T(n) + \mathbf{M}_d\mathbf{Q}_d\mathbf{M}_d^T$$

$$\mathbf{A}_d(n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \vdots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n|n)}, \mathbf{C}_d(n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \vdots \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n+1|n)}.$$

$\mathbf{M}_d$ se računa slično kao $\mathbf{A}_d$. Razlika je što se parcijalni izvodi računaju po $\mathbf{w}_d(n)$ u tački E[$\mathbf{w}_d(n)$]

Estimacija parametara sistema

Kalmanov filtar se može koristiti za estimaciju nepoznatih poremećaja ili parametara sistema. Nepoznati parametri ili poremećaji se modeluju kao nepoznata stanja sistema, a zatim se originalna stanja sistema proširuju novododatim stanjima, odnosno dobija se prošireni model sistema. Zadatak Kalmanovog filtra je da estimira originalna i dodata stanja (ovakva modifikacija KF-a se naziva Augmented (E)KF, A(E)KF)).

Bitno je napomenuti da nema suštinske razlike u primjeni KF-a (ili EKF-a) u estimaciji parametara/poremećaja. Bitno je parametre/poremećaje modelovati diferencijalnim/diferencnim jednačinama, a zatim ih uključiti u model sistema.

Ako su parametri/poremećaji konstantni ili se sporo mijenjaju tada se oni mogu modelovati kao početna stanja integratora:

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = 0, \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{p}.$$

U diskretnom slučaju prethodna jednačina ima oblik:

$$\mathbf{x}_a(n+1) = \mathbf{x}_a(n), \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{p}.$$

Estimacija parametara sistema

Međutim, treba pretpostaviti da na ova stanja djeluje šum:

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{w}_a(t), \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{p},$$

$$\mathbf{x}_a(n+1) = \mathbf{x}_a(n) + \mathbf{w}_{ad}(n), \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{p}.$$

gdje su $\mathbf{Q}_a\delta(t)$ i $\mathbf{Q}_a\delta(n)$ odgovarajuće kovarijacione matrice. Kovarijacona matrica proširenog vektora stanja je:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_a \end{bmatrix}.$$

Ako se parametri sistema ne mijenjaju ili sporo mijenjaju, tada $\mathbf{Q}_a$ treba usvojiti na malu vrijednost. Sa druge strane, $\mathbf{Q}_a$ treba povećavati ako se parametri sistema mijenjaju (jer je pretpostavljen pogrešan model parametara).

Mogu se usvojiti i drugačiji modeli parametara sistema. Na primjer, ako je poznato da se vrijednost parametra linearno mijenja, tada se on može modelovati kao početni uslov dvostrukog integratora:

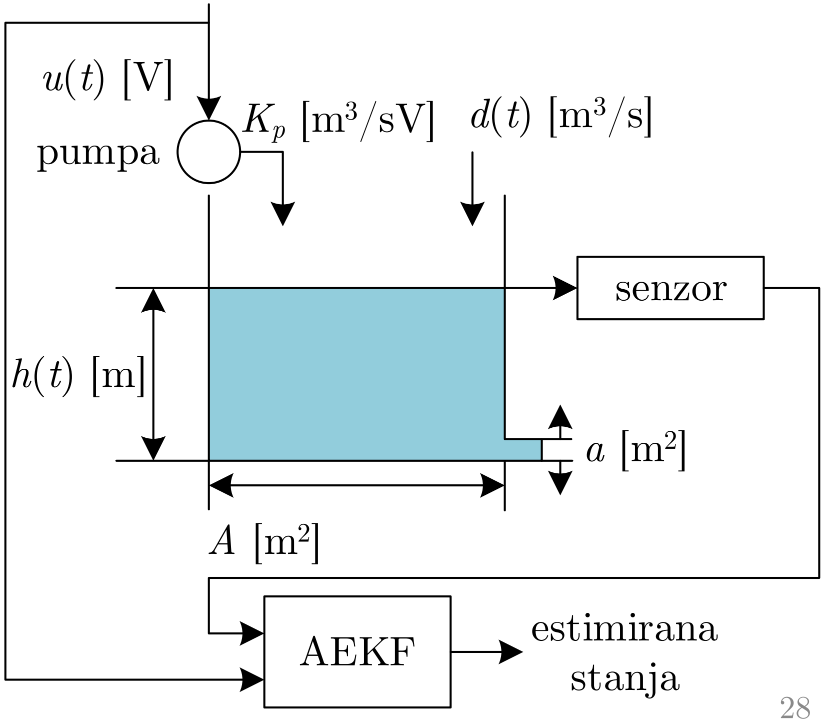
$$\ddot{\mathbf{x}}_a(t) = 0, \mathbf{x}_a(0) = \mathbf{p}.$$

Primjer – AEKF

Promjena nivoa tečnosti u rezerovaru prikazanom na slici se opisuje sljedećom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{h}(t) = -\frac{1}{A}a\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{A}K_p u(t) + \frac{1}{A}d(t),$$

gdje $h(t)$ nivo tečnosti, A=0.1m^2 je površina rezervoara, a=0.001m^2 je površina otvora na dnu rezerovara, $u(t)$ [V] je upravljački signal, K_p=0.001 m^3/(sV) je pojačanje aktuatora, a $d(t)$ [m^3/s] poremećaj koji je konstantan, ali je njegova vrijednost nepoznata.



a) Formirati diskretni model sistema u prostoru stanja. Nepoznati poremećaj modelovati kao stanje integratora. Diskretizovati sistem primjenom Ojlerove metode (dt=0.05s).

b) Simulirati Kalmanov filtar ako je $u(t)$=2V, a $d(t)$=0.001 m^3/s. Varijansa mjernog šuma je 0.0001. Vrijednost matrice $\mathbf{Q}$ odabrati tako da se dobiju što bolje performanse.

Primjer – AEKF

Najprije je potrebno formirati prošireni model sistema, pod pretpostavkom da se poremećaj sporo mijenja, odnosno da se može modelovati jednačinom:

$$\dot{x}_a(t) = 0, x_a(0) = p.$$

Nakon uvođenja smjena $x_1 = h(t)$ i $x_2(t) = x_a(t)$, diskretizovani model sistema se zapisuje u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= x_1(n) + dt\left(-\frac{a}{A}\sqrt{2gx_1(n)} + \frac{1}{A}x_2(n) + \frac{1}{A}u(n)\right) + w_{d_1}(n),\\
x_2(n+1) &= x_2(n) + w_{d_2}(n),\\
y(n) &= x_1(n) + v(n).
\end{aligned}$$

Za potrebe računanja kovarijacinih matrica prethodni model se mora linearizovati, pa je:

$$\mathbf{A}_d(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n|n)} = \mathbf{I} + dt\begin{bmatrix} -\dfrac{a\sqrt{g}}{\sqrt{2}A\sqrt{\hat{x}(n \mid n)}} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_d(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial w_{d_1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial w_{d_2}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial w_{d_1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w_{d_2}} \end{bmatrix}_{\mathbf{w}_d(n)=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

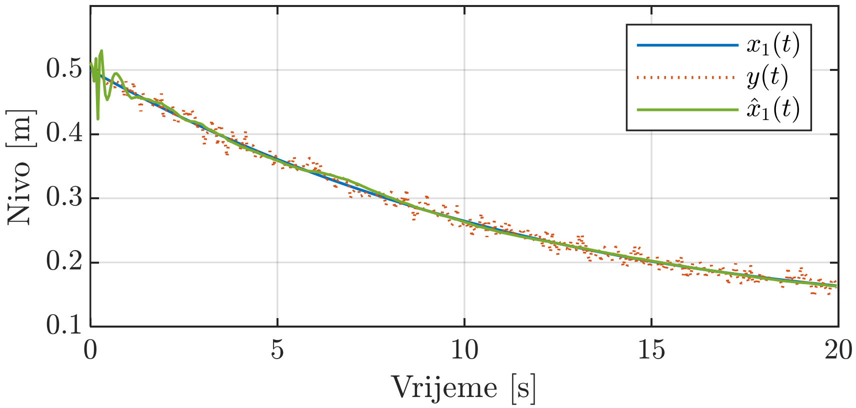
$$\mathbf{C}_d(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(n)=\hat{\mathbf{x}}(n+1|n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

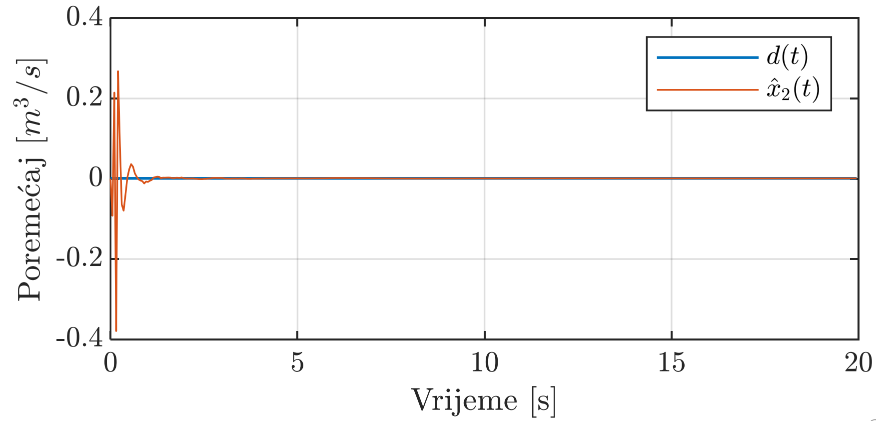
Primjer – AEKF

Na slici ispod su prikazani estimirani nivo tečnosti i estimirana vrijednost poremećaja. Parametri AEKF-a su podešeni na sljedeće vrijednosti:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-12} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = 10^{-4}.$$

Matrica **R** je jednaka stvarnoj varijansi mjernog šuma. Iako procesni šum ne postoji, važno je pravilno podesiti vrijednost matrice **Q**. Kako je prva jednačina nelinearna, element $\mathbf{Q}(1,1)$ ne smije biti previše mali. Simulacijama treba naći odgovarajući komprimis između vrijednosti ovog koeficijenta i **R**. Sa druge strane $\mathbf{Q}(2,2)$ treba podesiti na malu vrijednost, jer je model poremećaja tačan. Vrijednost ovog elementa bi trebalo povećati u slučaju kada bi poremećaj bio vremenski promjenljiv.





Primjer – AEKF

```
close all
A=0.1; a=0.002; g=9.81; Kp=0.001;
hp=0.5; d=0.001; %% pocetna visina u sudu i amplituda poremecaja
x=[hp;d]; % pocetna stanja sistema
dt=0.05; % perioda odabiranja
tf=20;
xp(:,1)=[0;0]; % pocetna stanja predikcije
Pp=diag([1 1]); %% kovarij. apriorne greske
Cd=[1 0];
R=0.0001;Qd=diag([1e-8 1e-12]);
for n=1:tf/dt
    u(n)=2*Kp;
    x(1,n+1)=x(1,n)+dt*(-a/A*sqrt(2*g*x(1,n))+1/A*x(2,n)+1/A*u(n));
    x(2,n+1)=d; % poremecaj
    y(n)=x(1,n)+randn*sqrt(R);
    %% korekcija na osnovu mjerenja
    K=Pp*Cd'*(Cd*Pp*Cd'+R)^-1;
    xc(:,n)=xp(:,n)+K*(y(n)-Cd*xp(:,n));
    %% predikcija na osnovu modela
    xp(1,n+1)=xc(1,n)+dt*(-a/A*sqrt(2*g*xc(1,n))+1/A*xc(2,n)+1/A*u(n));
    xp(2,n+1)=xc(2,n); % poremecaj
    %% update cov matrica
    Pc=(eye(2)-K*Cd)*Pp;
    Ad=eye(2)+dt*[-a*sqrt(g)/sqrt(2)/A/sqrt(xc(1,n)) 1;0 0];
    Pp=Ad*Pc*Ad'+Qd;
end
```